

# AIGC检测 · 全文报告单

NO:CNKIAIGC2026SJ\_20260529140728

检测时间:2026-05-06 21:54:09

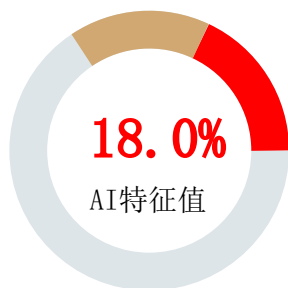
篇名: 基于牵引控制的分数阶有向复杂网络同步问题研究

作者: 陈小川

单位:

文件名:

## 全文检测结果



AI特征值: 18.0%  
AI特征字符数: 3810  
总字符数: 21170

- AI特征显著 (计入AI特征字符数)
- AI特征疑似 (未计入AI特征字符数)
- 未标识部分

## AIGC片段分布图

前部20%

AI特征值: 3.6%

AI特征字符数: 762

中部60%

AI特征值: 10.8%

AI特征字符数: 2286

后部20%

AI特征值: 3.6%

AI特征字符数: 762



## 分段检测结果

序号	AI特征值	AI特征字符数/章节(部分)字符数	章节(部分)名称
1	18.0%	3810 / 21170	论文全文








## 1. 论文全文

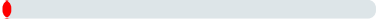







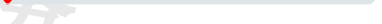
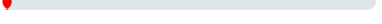
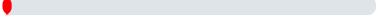



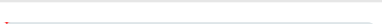



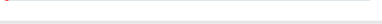
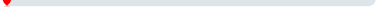
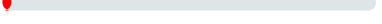
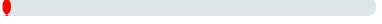
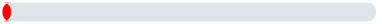






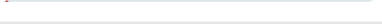

AI特征值: 18.0%

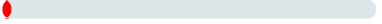



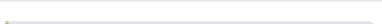




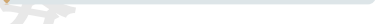
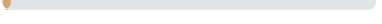
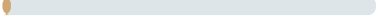




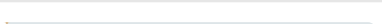



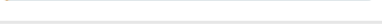
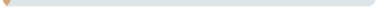
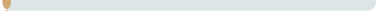
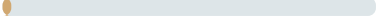
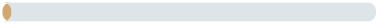







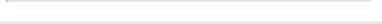

AI特征字符数 / 章节(部分)字符数: 3810 / 21170

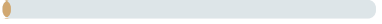



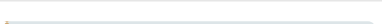




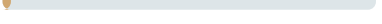
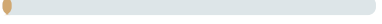




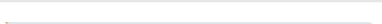



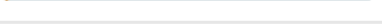
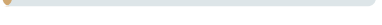
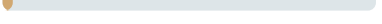
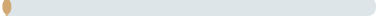
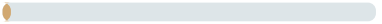







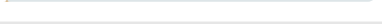

## 片段指标列表

序号	片段名称	字符数	
1	片段1	36	0.2%

2	片段2	161		0.8%
3	片段3	73		0.3%
4	片段4	44		0.2%
5	片段5	61		0.3%
6	片段6	29		0.1%
7	片段7	67		0.3%
8	片段8	81		0.4%
9	片段9	46		0.2%
10	片段10	49		0.2%
11	片段11	65		0.3%
12	片段12	69		0.3%
13	片段13	54		0.3%
14	片段14	49		0.2%
15	片段15	30		0.1%
16	片段16	68		0.3%
17	片段17	86		0.4%
18	片段18	45		0.2%
19	片段19	61		0.3%
20	片段20	56		0.3%
21	片段21	133		0.6%
22	片段22	56		0.3%
23	片段23	68		0.3%
24	片段24	22		0.1%
25	片段25	44		0.2%
26	片段26	135		0.6%
27	片段27	62		0.3%
28	片段28	123		0.6%
29	片段29	52		0.2%
30	片段30	53		0.3%
31	片段31	59		0.3%
32	片段32	53		0.3%
33	片段33	42		0.2%
34	片段34	54		0.3%
35	片段35	40		0.2%

36	片段36	43		0.2%
37	片段37	88		0.4%
38	片段38	35		0.2%
39	片段39	48		0.2%
40	片段40	28		0.1%
41	片段41	85		0.4%
42	片段42	110		0.5%
43	片段43	36		0.2%
44	片段44	121		0.6%
45	片段45	63		0.3%
46	片段46	70		0.3%
47	片段47	57		0.3%
48	片段48	53		0.3%
49	片段49	54		0.3%
50	片段50	33		0.2%
51	片段51	26		0.1%
52	片段52	14		0.1%
53	片段53	37		0.2%
54	片段54	43		0.2%
55	片段55	42		0.2%
56	片段56	43		0.2%
57	片段57	23		0.1%
58	片段58	23		0.1%
59	片段59	16		0.1%
60	片段60	25		0.1%
61	片段61	15		0.1%
62	片段62	25		0.1%
63	片段63	40		0.2%
64	片段64	45		0.2%
65	片段65	22		0.1%
66	片段66	60		0.3%
67	片段67	52		0.2%
68	片段68	26		0.1%
69	片段69	33		0.2%

70	片段70	45		0. 2%
71	片段71	42		0. 2%
72	片段72	37		0. 2%
73	片段73	144		0. 7%
74	片段74	46		0. 2%
75	片段75	20		0. 1%
76	片段76	19		0. 1%
77	片段77	52		0. 2%
78	片段78	29		0. 1%
79	片段79	31		0. 1%
80	片段80	23		0. 1%
81	片段81	54		0. 3%
82	片段82	58		0. 3%
83	片段83	17		0. 1%
84	片段84	41		0. 2%
85	片段85	32		0. 2%
86	片段86	20		0. 1%
87	片段87	38		0. 2%
88	片段88	33		0. 2%
89	片段89	27		0. 1%
90	片段90	28		0. 1%
91	片段91	50		0. 2%
92	片段92	32		0. 2%
93	片段93	33		0. 2%
94	片段94	28		0. 1%
95	片段95	37		0. 2%
96	片段96	26		0. 1%
97	片段97	14		0. 1%
98	片段98	25		0. 1%
99	片段99	34		0. 2%
100	片段100	43		0. 2%
101	片段101	47		0. 2%
102	片段102	63		0. 3%
103	片段103	34		0. 2%

104	片段104	30		0.1%
105	片段105	19		0.1%
106	片段106	27		0.1%
107	片段107	33		0.2%
108	片段108	51		0.2%
109	片段109	77		0.4%
110	片段110	64		0.3%
111	片段111	35		0.2%
112	片段112	43		0.2%
113	片段113	21		0.1%
114	片段114	63		0.3%
115	片段115	18		0.1%
116	片段116	29		0.1%
117	片段117	18		0.1%
118	片段118	38		0.2%
119	片段119	18		0.1%
120	片段120	52		0.2%
121	片段121	70		0.3%
122	片段122	28		0.1%
123	片段123	76		0.4%
124	片段124	137		0.6%
125	片段125	35		0.2%
126	片段126	23		0.1%
127	片段127	31		0.1%
128	片段128	18		0.1%
129	片段129	42		0.2%
130	片段130	42		0.2%
131	片段131	32		0.2%
132	片段132	27		0.1%
133	片段133	45		0.2%
134	片段134	24		0.1%
135	片段135	79		0.4%
136	片段136	60		0.3%
137	片段137	58		0.3%

138	片段138	76	<div><div></div></div>	0.4%
139	片段139	48	<div><div></div></div>	0.2%
140	片段140	54	<div><div></div></div>	0.3%
141	片段141	56	<div><div></div></div>	0.3%
142	片段142	99	<div><div></div></div>	0.5%
143	片段143	46	<div><div></div></div>	0.2%
144	片段144	64	<div><div></div></div>	0.3%
145	片段145	47	<div><div></div></div>	0.2%
146	片段146	49	<div><div></div></div>	0.2%
147	片段147	36	<div><div></div></div>	0.2%
148	片段148	65	<div><div></div></div>	0.3%
149	片段149	65	<div><div></div></div>	0.3%
150	片段150	44	<div><div></div></div>	0.2%

原文内容

无锡学院本科毕业论文  
本科毕业论文（设计）  
题 目 基于牵引控制的分数阶有向复杂网络同步问题研究  
学生姓名： 陈小川  
学 号： 22314105  
专 业： 信息与计算科学  
学院(部)： 网络空间安全学院  
指导教师： 刘凤仪  
二〇二 年 月  
论文独创性声明  
本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得无锡学院或其他教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。  
论文作者签名：\_\_\_\_\_ 签字日期：\_\_\_\_\_  
论文使用授权说明  
本人授权无锡学院可以保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子文档；允许论文被查阅和借阅；可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索；可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编本学位论文。不可用于任何非法用途。本文电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。论文的公布(包括刊登)授权无锡学院办理。  
论文作者签名：\_\_\_\_\_ 签字日期：\_\_\_\_\_  
指导教师签名：\_\_\_\_\_ 签字日期：\_\_\_\_\_  
基于牵引控制的分数阶有向复杂网络同步问题研究  
陈小川

**摘要:** 复杂网络同步控制在电力系统、生物网络及信息传播等领域具有重要意义。针对现有研究多依赖强连通或有向生成树等理想拓扑的局限性, 本文研究有向非强连通分数阶复杂网络的牵引同步问题。首先, 基于图论对网络进行强连通分量分解并构建有向无环图, 提出分层处理机制, 将同步问题转化为逐层同步问题。其次, 在各强连通分量内设计牵引节点选择策略, 建立误差系统, 并利用分数阶Lyapunov方法推导同步充分条件, 给出参数选取方法。最后, 以分数阶蔡氏电路为节点模型进行仿真。结果表明, 所提方法能够实现系统渐近同步, 不同阶次主要影响收敛速度而不改变同步结论。该方法具有良好的适用性与鲁棒性。

关键词: 牵引控制; 分数阶; 复杂网络

Synchronization of Fractional-Order Directed Complex Networks Based on Pinning Control

Xiaochuan Chen

School of Cybersecurity, CWXU, Wuxi, 214105, China

**Abstract:** Synchronization of complex networks has been widely studied due to its applications in power systems, biological networks, and information transmission. However, many existing results rely on ideal conditions such as strong connectivity or directed spanning trees, which may not always be satisfied. This paper considers the pinning synchronization problem for directed fractional-order complex networks without strong connectivity. The network is decomposed into strongly connected components (SCCs), and a directed acyclic graph (DAG) is constructed. Based on this structure, a layer-by-layer analysis is adopted to simplify the global synchronization problem. Pinning nodes are selected in each SCC according to node in-degree, and the corresponding error system is established. By using fractional-order Lyapunov stability theory and the comparison principle, sufficient conditions for asymptotic synchronization are obtained. Simulations based on fractional-order Chua's circuits show that the proposed method is effective. Different fractional orders mainly affect convergence speed, while the final synchronization result remains unchanged. The method also shows good applicability to general directed networks.

Key Words: Pinning Control; Fractional-Order; Complex Networks

## 目 录

### 1 绪论 2

#### 1.1 研究背景与意义 2

#### 1.2 国内外研究现状 3

##### 1.2.1 复杂网络同步研究 3

##### 1.2.2 分数阶系统同步研究 4

##### 1.2.3 牵引控制策略研究 5

#### 1.3 本文主要研究内容 5

### 2 预备知识与系统模型 6

#### 2.1 图论基础 6

##### 2.1.1 邻接矩阵与拉普拉斯矩阵 6

##### 2.1.2 强连通分量 7

##### 2.1.3 相关矩阵记号 8

#### 2.2 分数阶微积分基础 9

#### 2.3 系统模型与假设 10

#### 2.4 相关引理 11

### 3 牵引同步控制策略与稳定性分析 13

#### 3.1 网络分层与牵引节点的选择 13

#### 3.2 稳定性分析 14

#### 3.3 控制参数优化 19

### 4 仿真验证与分析 20

#### 4.1 仿真验证 20

#### 4.2 实验分析 24

### 5 总结与展望 25

#### 5.1 研究结论 25

#### 5.2 研究展望 26

### 参考文献 27

### 致谢 29

## 1 绪论

### 1.1 研究背景与意义

复杂网络通常由大量相互作用的个体（节点）通过一定的连接关系（边）构成，这类系统在互联网、电力系统、生物神经网络以及社会系统等实际场景中都可以看到。在这些网络中，同步现象是一种比较典型且重要的动力学行为，例如电力系统中发电机之间的同步运行，以及生物系统中的节律同步等。一般来说，系统能否实现良好的同步，往往会直接影响其稳定性以及功能的正常发挥，因此，围绕复杂网络同步控制问题的研究具有一定的理论意义[1]，同时也具有实际工程价值。

需要指出的是，在很多实际网络中，强连通性或存在有向生成树这样的理想条件并不一定能够满足。类似的问题在近年来的研究中也逐渐受到关注。例如，引文网络、信息传播网络等，往往呈现出非强连通甚至带有层次结构的特点。在这种情况下，一些依赖全局连通性的同步控制方法就不太容易直接应用。因此，从更一般的拓扑结构出发来研究同步控制问题，是有必要的。

另一方面，分数阶微积分可以看作是对传统整数阶微积分的一种推广，其基本思想是将微分与积分的阶次从整数扩展到任意实数甚至复数。与整数阶导数只反映函数在某一时刻的局部变化不同，分数阶导数通常通过带有弱奇异核的积分形式来定义，其结果与系统过去的状态有关，也就是说，它具有一定的“记忆”特性。正因为这种非局部性，分数阶模型在描述一些实际系统时往往更加贴近真实情况。

从发展过程来看，分数阶微积分的相关思想可以追溯到17世纪。1695年，Leibniz在与其他人的通信中提出了关于“半阶导数”的问题[2]，之后Euler、Riemann以及Liouville等学者对其进行了进一步研究，并逐渐形成了较为系统的理论框架。有学者（如张文芳）在相关研究中指出，分数阶微积分经历了从早期设想到严格数学定义的发展过程，其中Riemann-Liouville型算子的提出起到了比较关键的作用。

在此基础上，20世纪提出的Caputo定义，使分数阶导数在工程问题中的应用变得更加方便，尤其是在处理具有明确初始条件的系统时更为合适。同时，Grünwald-Letnikov定义为数值计算提供了一种可行途径，这也在一定程度上推动了分数阶模型在实际问题中的应用。随着研究的深入，分数阶微积分逐渐从纯数学领域扩展到多学科交叉的应用之中。

进一步来看，相关研究（如付洋的工作）表明，分数阶导数中的记忆核函数通常具有幂律衰减形式，这意味着系统对历史状态的影响是一种“长记忆”，而不是简单的指数衰减[3]。这一特点使得分数阶模型在描述具有滞后性、遗传性或长程相关性的过程时，更具有优势。此外，由于整数阶模型可以看作分数阶模型的特例，分数阶方法在一定程度上也提供了一种统一描述不同动力学行为的框架。

在工程应用方面，分数阶微积分已经被用于粘弹性材料、反常扩散、控制系统以及复杂网络等多个领域。有研究指出，引入分数阶导数后，可以在一定程度上提高模型的灵活性和描述精度，使其更符合实际系统的动态特性。因此，从建模角度来看，分数阶方法提供了一种更加一般化的工具。

相比之下，传统的整数阶模型主要基于局部变化率，在处理具有记忆或遗传特性的系统时，往往存在一定局限。例如在黏弹性材料、电化学过程以及复杂网络动力学中，分数阶模型通常能够给出更为准确的描述。因此，将分数阶理论引入复杂网络同步控制问题，不仅有助于弥补整数阶模型在刻画历史依赖方面的不足，也有助于提升模型对实际系统行为的刻画能力。

基于以上背景，本文主要研究有向非强连通分数阶复杂网络的牵引同步控制问题，目标是在较一般拓扑条件下，建立具有一定理论依据的同步判据。

复杂网络是由大量相互作用的个体(节点)通过一定连接关系(边)构成的系统，广泛存在于互联网、电力系统、生物神经网络以及社会系统等实际场景中。在此类网络中，同步现象是一种典型且重要的动力学行为，例如电力系统中发电机的同步运行以及生物系统中的节律同步等。系统的同步性能往往直接关系到其稳定性与功能实现，因此，复杂网络同步控制问题具有重要的理论意义[1]与工程应用价值。

在实际应用中，许多复杂网络并不满足强连通性或包含有向生成树等理想条件，这一问题在复杂网络研究中已被广泛关注。例如，引文网络和信息传播网络通常呈现出非强连通甚至分层结构。这使得传统依赖全局连通假设的同步控制方法难以直接应用。因此，有必要针对更一般拓扑结构下的同步控制问题开展研究。

分数阶微积分是对经典整数阶微积分的推广，其核心在于将微分与积分的阶次从整数扩展至任意实数甚至复数。与传统整数阶导数仅依赖函数在某一时刻的局部变化率不同，分数阶导数通常通过带有弱奇异核的积分形式来定义，其运算过程体现为对系统历史状态的加权累积，从而使其具有显著的非局部性与记忆效应[2]。

从历史发展角度来看，分数阶微积分的思想最早可追溯至17世纪。1695年Leibniz在通信中首次提出“半阶导数”的问题[2]，随后Euler、Riemann及Liouville等学者对其进行了系统研究，逐步建立了分数阶微积分的基本理论框架。张文芳在其关于分数阶微积分概念起源与演化的研究中指出，该理论经历了由早期数学设想到严格定义建立的发展过程，其中Riemann-Liouville型算子的提出标志着分数阶微积分走向数学化与体系化。

在此基础上，20世纪Caputo定义的引入使分数阶导数更适用于工程实际问题，尤其是在处理具有明确初始条件的物理系统时表现出良好的适用性。同时，Grünwald-Letnikov定义为数值计算提供了重要工具，推动了分数阶模型在工程中的实际应用。随着理论的不完善，分数阶微积分逐渐由纯数学研究拓展至多学科交叉领域。

结合付洋关于分数阶微分性质及其应用的研究可以进一步看出，分数阶导数中的记忆核函数通常呈现幂律衰减特征，这使得系统对历史状态的影响呈现“长记忆”特性，而非指数衰减形式[3]。这种特性使分数阶模型在描述复杂系统时具有更加真实的物理意义，尤其适用于刻画具有滞后性、遗传性及长程相关性的动态过程。此外，分数阶算子还具有良好的连续插值性质，即整数阶微积分可视为其特例，从而在统一框架下描述不同阶次的动力学行为。

在工程应用方面，分数阶微积分已广泛应用于粘弹性材料、反常扩散、控制系统以及复杂网络等领域。付洋的研究表明，引入分数阶导数能够有效提高模型自由度与描述精度，使系统建模更加贴近实际动态特性。因此，分数阶微积分通过融合历史记忆机制与非局部特征，为复杂系统建模提供了一种更加一般且有效的数学工具。

整数阶模型往往基于局部变化率，难以准确反映实际系统中普遍存在的记忆与遗传特性，因而在某些复杂场景下存在建模精度不足的问题。在黏弹性材料、电化学过程、生物系统以及复杂网络动力学等领域中，分数阶模型能够提供更高的拟合精度与更真实的动态描述。因此，将分数阶理论引入复杂网络同步控制问题的研究，不仅可以弥补整数阶模型在刻画系统历史依赖方面的不足，还能够提升模型对实际复杂系统行为的描述能力，从而具有重要的理论意义与潜在的工程应用价值。

基于上述背景，本文针对有向非强连通分数阶复杂网络的牵引同步控制问题开展研究，旨在建立具有严格理论保证的同步判据。

## 1.2 国内外研究现状

### 1.2.1 复杂网络同步研究

自1998年 Duncan Watts 和 Steven Strogatz 提出小世界网络模型[4]，以及1999年 Albert-László Barabási 与 Réka Albert 提出无标度网络模型[5]以来，复杂网络逐渐成为研究实际系统结构的重要工具。之所以受到广泛关注，一个重要原因在于，这些模型能够在一定程度上反映真实网络中的一些典型特征，例如“小世界性”和“无标度性”。在此基础上，人们开

始更多地关注网络上的动力学行为问题，其中，同步作为一种比较典型的集体行为，也慢慢成为研究的重点之一。

围绕复杂网络同步问题，学者们已经提出了多种不同的控制方法，比如线性反馈控制、自适应控制、脉冲控制以及牵引控制等。从实际角度来看，牵引控制（pinning control）由于只需要对少量节点施加控制，就有可能通过网络耦合作用带动整体实现同步，因此在降低控制成本和提高可实现性方面具有一定优势。也正因为这一点，该方法在相关研究中被反复讨论，并逐渐成为一个比较重要的方向[1]。

从已有综述性工作（如任红卫、邓飞其的研究）可以看出，复杂网络理论的应用范围已经扩展到电力系统、通信网络以及多智能体系统等多个领域[6]。同时，研究内容也不再局限于早期的结构分析，而是逐步转向对动力学行为的讨论，其中同步问题一直是一个核心内容。不过需要注意的是，现有不少研究仍然建立在一些相对理想的假设之上，例如要求网络是强连通的，或者至少包含有向生成树。在这些条件下，借助图论方法以及拉普拉斯矩阵工具，可以较为方便地建立同步分析框架。

但在实际系统中，这类理想条件往往不容易满足。例如，由于通信受限、节点失效或连接不完全等原因，网络结构可能变得较为复杂，甚至不具备强连通性。在这种情况下，一些依赖全局连通性的分析方法就会受到限制，直接应用也会遇到困难。进一步来说，对于一般的有向网络，尤其是在拓扑结构不完备或缺乏全局信息传递路径时，其同步机理以及相应的控制方法，目前的研究还不算充分，还有继续深入的空间。

总体来看，现有大多数关于复杂网络同步的工作，仍然不同程度地依赖强连通或有向生成树等条件。这虽然在理论推导上比较方便，但也在一定程度上限制了方法的适用范围。因此，针对更一般的非强连通有向复杂网络开展研究，是一个比较自然也有实际意义的方向。

自1998年Duncan Watts和Steven Strogatz提出小世界网络模型[4]，以及1999年Albert-László Barabási和Réka Albert提出无标度网络模型以来[5]，复杂网络因其能够刻画大量真实系统中的拓扑结构特性而受到广泛关注。这两类经典模型揭示了现实网络中普遍存在的“小世界性”和“无标度性”特征，为复杂系统动力学分析提供了重要理论基础。在此背景下，复杂网络上的同步行为作为一种典型的集体动力学现象，逐渐成为非线性动力系统与控制理论领域的研究热点之一。

针对复杂网络同步问题，国内外学者提出了多种控制方法与理论框架，包括线性反馈控制、自适应控制、脉冲控制以及牵引控制等多种策略。其中，汪小帆等人提出的牵引控制（pinning control）由于仅需对网络中少量关键节点施加控制输入，即可通过网络耦合实现整体系统的同步，因此在降低控制成本、减少信息获取需求以及提高工程可实现性方面具有显著优势，已成为复杂网络同步控制研究中的重要方向之一[1]。

参考任红卫、邓飞其对复杂网络相关研究进展的综述可以发现，复杂网络理论已广泛应用于电力系统、通信网络及多智能体系统等领域，其研究内容也由早期的静态结构分析逐步拓展至动力学行为研究，其中同步问题作为刻画网络整体协同行为的重要内容，受到持续关注[6]。在现有研究中，多数工作仍基于确定性网络模型展开，并通常引入较强的拓扑假设，例如要求网络具备强连通性或至少包含有向生成树结构，以保证系统状态信息能够在网络中有效传播，在此基础上，借助图论与拉普拉斯矩阵方法，可以较为系统地建立同步判据与控制策略。然而，在实际应用中，受通信约束、节点故障及连接不完备等因素影响，网络拓扑往往更加复杂，甚至呈现出非强连通特征，使得依赖理想拓扑条件的分析方法难以直接应用。进一步来看，针对一般有向网络，尤其是在缺乏全局连通性或结构不完备情况下的同步问题，相关研究仍相对不足，其同步机理及控制方法有待进一步深入探讨。

现有大多数关于复杂网络同步的研究通常仍基于较为理想的拓扑假设，例如网络具有强连通性或包含有向生成树结构。这类假设在理论分析中具有一定便利性，但在实际工程网络中往往难以满足，从而限制了相关方法的适用范围。因此，针对一般非强连通有向复杂网络的同步问题，仍有待进一步深入研究与完善。

### 1.2.2 分数阶系统同步研究

分数阶微积分的发展可以追溯到三百多年前，不过，从工程应用角度来看，其较为系统的研究主要还是集中在近几十年。Podlubny在其专著中对分数阶微分方程的基本理论进行了较为系统的梳理，并指出分数阶算子在描述具有记忆性和遗传性的动态过程时具有一定优势，从而为复杂系统建模提供了一种较为统一的框架[7]。结合具体问题来看，不少实际系统的动态行为并不完全符合整数阶模型所假设的“局部性”，例如电极-电解质极化过程、黏弹性材料以及部分生物系统等，其演化过程往往

会持续受到历史状态的影响。在这种情况下，引入分数阶模型通常能够得到更接近实际的描述。

随着相关研究的不断推进，分数阶系统中的同步问题也逐渐受到关注，尤其是在复杂网络背景下，这一问题的研究意义变得更加明显。目前已有工作多集中在分数阶混沌系统以及分数阶神经网络等方向，并取得了一定进展。例如，Zhao和Zhang在考虑时变时滞的情况下，利用牵引控制方法给出了分数阶复杂网络实现同步的充分条件[8]；Ji和Lin则将研究对象扩展到分数阶反应扩散网络，在局部控制作用下讨论了系统同步的实现问题[9]；此外，Wang等还进一步考虑了随机扰动的影响，对噪声环境下分数阶复杂网络的随机同步进行了分析，并给出了相应的稳定性结果[10]。这些研究从不同角度推动了相关问题的的发展。

不过，从整体来看，现有成果在一定程度上仍依赖于较为理想的拓扑假设，例如网络具有强连通性，或者结构相对规则。在这类条件下，借助Lyapunov方法可以较为统一地开展分析。相比之下，分数阶复杂网络由于本身具有记忆性和非局部性，其动态行为往往更加复杂；再考虑到实际网络中普遍存在的有向性、非对称性以及非强连通等特点，问题的分析难度会进一步增加。因此，对于分数阶有向非强连通复杂网络的同步问题，尤其是在牵引控制框架下的系统分析与控制设计，目前还缺乏较为系统的理论结果，这一方向仍有进一步研究的必要。

分数阶微积分的发展已有三百余年历史，但其在工程领域中的系统性应用主要集中在近几十年。Podlubny在其专著中系统总结了分数阶微分方程的基本理论，指出分数阶算子能够有效刻画具有记忆性与遗传性的动态过程，为复杂系统的数学建模提供了统一框架[7]。从实际应用来看，许多物理与工程系统的动态行为并不完全符合整数阶模型的局部性假设，例如电极-电解质极化过程、黏弹性材料以及部分生物系统，其演化过程往往受到历史状态的持续影响，因此采用分数阶模型能够更真实地反映其动力学特征。

随着研究的深入，分数阶复杂系统的同步问题逐渐受到关注，尤其是在复杂网络背景下表现出重要的理论价值与应用意义。目前已有研究主要集中在分数阶混沌系统以及分数阶神经网络的同步问题，并取得了一定进展。例如，Zhao和Zhang针对具有时变时滞的分数阶复杂网络，利用牵引控制方法给出了系统实现同步的充分条件[8]；Ji和Lin进一步将研究拓展到分数阶反应扩散网络，在局部控制作用下分析了系统同步的可达性[9]；Wang等则考虑随机扰动因素的影响，研究了噪声环境下分数阶复杂动力网络的随机同步问题，并给出了相应的稳定性分析结果[10]。

从现有研究来看，大多数成果仍然依赖较为理想的网络结构假设，例如强连通或规则拓扑。在此类结构下，系统分析通常可以在统一的Lyapunov框架下进行处理。相比之下，分数阶复杂网络由于其动态特性具有记忆性和非局部性，使得系统行为更加复杂；而在实际应用中，网络往往同时呈现出有向性、非对称性以及非强连通等特征，进一步增加了同步分析的难度。因此，针对分数阶有向非强连通复杂网络的同步问题，特别是在牵引控制框架下的系统分析与控制设计，目前仍缺乏系统性的理论结果，有待进一步深入研究。

### 1.2.3 牵引控制策略研究

在牵引控制问题中，比较关键的一点在于如何选择合适的牵引节点，以及控制参数应当如何设定。传统方法大多是从节点的中心性出发，例如利用节点度、介数或特征向量等指标来进行筛选。一般来说，节点度可以反映其局部连接能力，而介数中心性则更多体现节点在信息传递过程中的“中介”作用。不过，这类方法本质上还是依赖局部或半局部的拓扑信息，对网络整体结构的考虑相对有限，因此在结构较为复杂的情况下，得到的节点选择结果有时并不理想[11][12]。

近年来，随着 Larry Page 和 Sergey Brin 提出的 PageRank 算法逐渐被引入到复杂网络分析中，一些研究开始尝试从全局传播的角度来处理节点重要性问题。相较于只关注局部结构，这类方法通过引入类似随机游走和迭代加权的机制，使节点的重要性能在整个网络中不断传递和累积。在复杂网络控制领域的相关综述中，Zhao J、Li Q 和 Wang Y 对牵引可控性的研究进展进行了总结，并指出单一中心性指标在节点选择方面存在一定局限[2]。

在此基础上，一些学者进一步提出了类似ControlRank的排序方法。其基本思路是，在评估节点重要性时，同时考虑节点的直接连接关系以及其在网络中的传播影响力。换句话说，不仅关注“连了多少节点”，也关注这些影响如何在网络中逐步扩散。通过这种方式，可以在一定程度上更准确地识别对系统控制更关键的节点。

与传统中心性方法相比，这类基于PageRank思想的改进方法能够从整体上反映节点在网络中的作用。它不仅考虑邻接关系，还将信息在网络中的递归传播过程纳入分析，因此在面对结构复杂或不规则的网络时，往往表现出更好的适应性和一定的鲁

棒性。从这个角度来看，这一思路为牵引控制节点选择问题提供了新的分析方式，也为后续优化控制效果、降低控制代价提供了一定的参考。

牵引控制的关键问题在于牵引节点的选择以及控制参数的设计。传统方法主要基于节点的度、介数或特征向量等中心性指标进行节点选择，例如利用节点度衡量其局部连接能力，或通过介数中心性刻画节点在信息传输中的中介作用等。然而，这类方法本质上仍依赖局部或半局部拓扑信息，往往忽略了网络整体结构对节点重要性的影响，从而在复杂拓扑条件下可能导致选择结果不够最优[11][12]。

近年来，受PageRank算法思想的启发(由Page与Brin提出，用于Google搜索引擎网页重要性排序)[13]，部分研究者开始将全局传播机制引入复杂网络控制问题中。其中，在复杂网络控制领域的综述性研究中，Zhao J、Li Q 和 Wang Y 系统总结了牵引可控性的相关进展，并指出基于单一中心性指标的节点选择方法存在局限性[2]。在此基础上，一些学者进一步提出了类似ControlRank的节点排序思想，例如在控制过程中通过类PageRank的随机游走与迭代加权机制，同时考虑节点的局部连接关系与其在全局网络中的传播影响力，从而更有效地识别关键控制节点。

与传统中心性方法相比，这类基于PageRank思想的改进方法能够更全面地反映节点在整个网络结构中的综合作用，不仅考虑直接邻接关系，还考虑信息在网络中的递归传播效应，因此在牵引控制节点选择问题中表现出更好的适应性与鲁棒性。这一思路为复杂网络同步控制策略的设计提供了新的研究视角，也为后续进一步提升控制效率与优化控制代价提供了理论基础。

### 1.3 本文主要研究内容

本文针对有向非强连通分数阶复杂网络的牵引同步问题，主要开展以下研究工作：

- (1)网络分层处理方法：将有向图分解为强连通分量(Strongly Connected Components, SCC)，并构造有向无环图(Directed Acyclic Graph, DAG)，在此基础上设计分层算法，对各SCC进行分层分析。
- (2)牵引节点选择方法：基于ControlRank算法确定各SCC中需要施加控制的节点，相较传统方法具有更好的适用性与有效性。
- (3)同步条件推导：利用分数阶Lyapunov稳定性理论，推导保证网络与孤立节点系统实现同步的充分条件，并给出耦合强度及控制增益的设计方法。
- (4)数值仿真验证：通过构建4节点小规模网络模型，对所提出方法进行仿真验证，并分析分数阶阶数对系统同步性能的影响。

### 2预备知识与系统模型

本章主要介绍本文研究所需的基础理论与相关工具，包括图论基础、分数阶微积分定义以及复杂网络系统的稳定性理论。这些内容为后续同步控制模型的建立与理论分析提供必要的理论支撑。

#### 2.1 图论基础

复杂网络通常被建模为图结构，用于刻画节点及其相互作用关系，这一方法已扩展至多层网络与时变网络框架中[13]。考虑由个节点组成的有向图，其中为节点集合，为有向边的集合。若，表示存在从节点指向节点的有向边，即节点可以接收来自节点的信息。

##### 2.1.1 邻接矩阵与拉普拉斯矩阵

定义邻接矩阵，其中当且仅当，否则。通常假设节点自身没有连接，即。

定义出度矩阵，其中为节点的出度（以为起点的边数）。入度矩阵类似定义。

有向图的拉普拉斯矩阵定义为：

本文采用基于出度的拉普拉斯矩阵定义，即，并用于后续同步误差系统的统一表示。

##### 2.1.2 强连通分量

在有向图中，如果任意两个节点和之间都存在从到和从到的有向路径，则称该有向图是强连通的。对于非强连通图，可以将其分解为若干个强连通子图，每个这样的子图称为一个强连通分量(Strongly Connected Component, SCC)。将每个SCC缩为一个节点，原图中不同SCC之间的边转换为新节点之间的有向边，得到的图是一个有向无环图(Directed Acyclic Graph, DAG)。DAG中存在至少一个源SCC(入度为0)和一个汇SCC(出度为0)。利用DAG可以定义节点的分层：将源SCC作为第1层后新的源SCC作为

第2层，依此类推。这个分层结构对后续的逐层同步控制至关重要。为了更直观的观察有向图的分解，下图展示了一个7节点有向图及其SCC分解。

图 1 网络拓扑结构及其强连通分量划分

$SCC1=\{1, 2\}$ ， $SCC2=\{3\}$ ， $SCC3=\{4\}$ ， $SCC4=\{5, 6, 7\}$ 。将每个SCC缩为一个节点后，可得到DAG： $SCC1-\{SCC2, SCC3\}-SCC4$ 。

图 2 缩点后的有向无环图(DAG)结构

分层结果：第1层= $SCC1$ ，第2层= $SCC2, SCC3$ ，第3层= $SCC4$

2.1.3 相关矩阵记号

对于给定的有向图，其强连通分量（SCC）经分解后可构成一个有向无环图（DAG）。根据DAG结构，可将原网络划分为若干层。设网络被划分为层，第层对应的节点集合记为：

(2-1)

其中表示第层的节点数。

为描述层间与层内的耦合关系，引入如下矩阵记号：

1. 层内邻接矩阵：记第层节点之间的邻接矩阵为：

表示第层内部节点之间的连接关系。

2. 层间邻接矩阵：对于第k层与第层( $k \neq l$ )，定义：

表示从第层指向第k层的边关系。

3. 层内拉普拉斯矩阵：定义第k层的拉普拉斯矩阵为：

其中为第k层的出度对角矩阵，其对角元素为该层节点的出度(可包含指向其他层的边)。

整体拉普拉斯矩阵的分块结构在适当的节点排序下，整个网络的拉普拉斯矩阵可写成分块下三角形式：

该结构反映了信息从低层向高层单向传递的特性。

2.2 分数阶微积分基础

本节主要介绍分数阶微积分的基本理论，包括分数阶导数的定义及其性质，以及常用的 Mittag-Leffler 函数等内容。这些基础知识将为后续复杂网络系统的建模与稳定性分析提供理论支撑。

定义1：分数阶积分的定义，设函数且，，则函数的Riemann-Liouville型  $\alpha$  阶分数阶积分定义为：

定义2：对于函数，其阶() Caputo导数定义为：

(2-2)

其中，是Gamma函数，满足。对于向量函数，分数阶导数逐分量定义。Caputo分数阶导数通过对整数阶导数进行积分形式的推广来定义，能够在刻画系统历史状态对当前行为的影响方面体现出良好的记忆特性。与其他分数阶导数定义相比，Caputo导数允许采用具有明确物理意义的整数阶初始条件。本文选用Caputo分数阶导数进行系统建模，主要基于以下考虑：在复杂网络动力学分析中，其非局部记忆特性更贴合实际系统的历史依赖行为；其方程形式与传统整数阶微分方程保持较好的一致性，有利于后续的同步控制分析与稳定性证明；同时，从数值计算角度来看，Caputo定义在离散化处理时具有较好的稳定性与收敛性，能够有效降低数值积分过程中的误差累积问题，从而提高仿真结果的可靠性。

定义3：(Mittag-Leffler函数)双参数Mittag-Leffler函数定义为：

分数阶线性系统的解可表示为。系统的稳定性取决于矩阵M的特征值是否位于某个扇形区域内。

2.3 系统模型与假设

考虑由N个相同分数阶系统组成的复杂网络，每个节点是一个n维分数阶混沌系统。网络的动力学方程如下：

其中，，为分数阶阶数；为节点i的状态向量；为非线性函数，描述节点的局部动力学(蔡氏电路的具体形式见第四章)； $c>0$ 为全局耦合强度；为邻接矩阵元素，表示节点j到i有边；为内联矩阵，通常取单位矩阵，表示各状态分量均参与耦合；为控制增益：若 $>0$ ，则节点i被直接控制到目标状态；否则未被控制。

孤立节点的动力学由下式给出

(2-4)

定义4: 对于给定的复杂网络系统, 若存在一个共同轨迹 $s(t)$ , 使得对所有节点 $i, j$ , 均有

或等价地

我们称网络实现了同步。

假设2.1: (被动度条件) 非线性函数 $f()$ 满足扇形有界条件: 存在常数, 使得对所有, 有

该条件称为被动度 (passivity) 或单边Lipschitz条件, 它刻画了系统的耗散性。许多混沌系统 (如Lorenz系统、蔡氏电路) 都满足该条件, 可取为系统雅可比矩阵的最大特征值上界。该假设将用于第三章Lyapunov导数估计。

## 2.4 相关引理

以下引理将在第三章的同步条件证明中用到。

引理2.1: 对于任意可微向量函数, 有:

其中 $P$ 是正定对称矩阵。该引理是构造Lyapunov函数的基础, 在非线性和分数阶系统稳定性分析中被广泛应用[14]。

引理2.2: (舒尔补引理) 给定对称分块矩阵, 其中 $A$ 和 $B$ 为方阵。则以下条件等价:

;

引理2.3: (分数阶微分方程比较原理) 考虑标量分数阶微分方程:

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 。则存在常数 $M$ 使得:

特别地, 若 $f(0) = 0$ , 该结论可由分数阶系统稳定性理论得到。

## 3 牵引同步控制策略

在前述图论与分数阶系统理论基础上, 本章针对有向非强连通分数阶复杂网络的同步问题, 提出一种实用的牵引控制策略。先通过网络分层分解, 将复杂问题简化为逐层同步后在每个强连通分量内选择关键节点进行牵引。然后, 给出同步参数的经验选取方法, 最终总结控制策略的实施步骤。

### 3.1 网络分层与牵引节点的选择

#### (1) 网络分层算法

步骤1调用Matlab函数: `graphcomp`, 其中 $\text{numSCC}$  表示得到的SCC数量,  $\text{compIdx}$  表示每个节点所属SCC的索引。

步骤2计算压缩图的邻接矩阵的元素:

其中 $i$ 和 $j$ 分别指代网络中的具体节点,  $\text{SCC}_i$ 和 $\text{SCC}_j$ 表示两个不同的强连通分量,  $E$ 代表所有有向边的集合。

步骤3初始化, 定义集合 $L_1$ 。将所有入度为0的 SCC 归入第1层。

步骤4对于 $k=1$ , 递归定义第 $k$ 层:

先剔除已分配集合: 定义剩余分量集合为 $R_k$ :

确定新起点: 第 $k$ 层集合 $L_k$ 定义为在 $R_{k-1}$ 中, 其入边仅来源于 $L_{k-1}$ 的所有分量:

步骤5定义分层矩阵 $M$ , 其中第 $m$ 列由 $L_m$ 中的SCC索引填充, 其余元素补0。

#### (2) 牵引节点选择策略

设网络中需要同步的节点数量为 $q$ , 牵引节点集合为 $S$ , 满足 $|S|=q$ 。

步骤1对于当前层中的每个强连通分量, 定义其内部节点集合 $V_i$ 。

步骤2判断SCC类型: 若 $V_i$ 包含多个节点, 标记为  $\text{SCC}^+$  (多节点强连通分量), 若 $V_i$ 仅含一个节点, 标记为  $\text{SCC}^-$  (单节点分量)。

步骤3对于 $\text{SCC}^+$ , 采用ControlRank算法确定牵引节点:

其中 $A$ 为 $\text{SCC}^+$ 内部的邻接矩阵,  $B$ 为 $\text{SCC}^+$ 的出度矩阵, 初始值是任意的。迭代收敛后, 选取CR值最大的节点作为牵引节点。

步骤4对于 $\text{SCC}^-$  (单节点), 直接将该节点选为牵引节点。

### 3.2 稳定性分析与同步控制

定义同步误差

(3-1)

其中 $s(t)$ 满足孤立节点动力学利用系统模型(2-3)，可得误差动力学方程：

(3-2)

记，并引入拉普拉斯矩阵，则网络耦合项可写成紧凑形式：

(3-3)

其中是分块对角非线性函数，。

由于图是非强连通的，直接分析全局误差系统较为复杂。利用分层结构，我们可以从第1层开始，依次证明每一层的误差收敛到零，且上一层收敛后，其对下一层的影响可视为已知的有界驱动。

考虑第 $k$ 层内的节点，假设来自更高层( $<k$ )的耦合项已经为零或指数衰减。则第 $k$ 层内部的误差系统可以写为：

其中是第 $k$ 层的内部拉普拉斯矩阵(包含层内边以及从低层指向该层的边)，是牵引控制矩阵。

定理1：（同步的充分条件）对于第 $k$ 层，如果存在正定对称矩阵和常数，使得以下矩阵不等式成立：

则第 $k$ 层的同步误差将指数收敛到零。特别地，对于第1层(源SCC)，由于没有来自更低层的耦合输入，只需上述不等式成立即可保证同步。

证明：

记第 $k$ 层的节点集合为，其状态误差向量为

根据第2.1.3节的分块拉普拉斯矩阵结构，第 $k$ 层的误差动力学可写为：

其中，。根据定理条件，第 $k$ 层的误差已经指数衰减，即存在常数使。因此跨层耦合项可视为指数衰减的扰动，在稳定性分析中可被吸收或最终趋于零。以下主要分析第 $k$ 层内部的齐次部分。

构造Lyapunov函数：

利用引理2.1对求阶Caputo导数：

将误差动力学代入，并分离非线性项、层内耦合项、牵引项：

(1)

处理非线性项：由假说2.1(被动度条件)，存在常数使得

因此

(2)

处理层内耦合项：

(3)

处理牵引项：

(4)

处理跨层扰动项：记，则该项贡献为。由Cauchy-Schwarz不等式及指数衰减假设，存在常数使得

其中。由于指数衰减，该项可被后续的负项吸收，不影响指数收敛的结论。为简化，在主要证明中先忽略该扰动，最后利用比较原理说明其不影响稳定性(见注记)。将(2)-(4)代入(1)，并忽略扰动项，得到：

由定理条件，上述矩阵不等式成立，即存在使得

因此

(5)

现在考虑跨层扰动项，记，则完整的导数不等式为

由指数衰减假设，存在常数使得。于是

代入得

由于指数衰减，存在使得右端。应用引理2.5(分数阶比较原理)，可得指数收敛到零(具体地，存在常数使)。因此第 $k$ 层误差指数收敛。

对于第1层，由于没有跨层扰动()，直接从(5)式结合引理2.5得，而Mittag-Leffler函数在时趋于零，且衰减速度是指数型的(当时即为指数衰减)。故定理得证。

注记：本证明利用了分层结构中信息单向流动的特点：低层同步后，其对高层的耦合项成为指数衰减的强项，不影响高层误差系统的渐近稳定性。实际计算中，可通过求解定理中的LMI获得最小的及相应的控制参数。

推论3.1:若第k层只有一个节点i (即= 1)，则同步条件简化为：存在 $P > 0$ 使得  
通常取且时，。这表明孤立节点SCC需要足够大的牵引增益才能被直接同步。

实际应用中，我们可以取简化计算。令(各状态分量均耦合)，则定理1中的矩阵不等式退化为：

(3-4)

这是一个关于和的线性矩阵不等式(LMI)。由于是奇异矩阵(每行和为零)，但加上后可以变为负定。具体地，需要满足：  
其中表示最小正特征值。对于工程应用，通常先取定足够大(如10倍于)，然后根据节点度信息设置：对于被牵引节点，；  
对于其他节点，。此时条件简化为：

其中是在牵引节点位置为1的对角矩阵。通过求解该不等式，可以得到最小需要的。

3.3 控制参数优化

在满足同步条件的前提下，我们希望控制能量最小，以节约资源。定义总控制能量函数：

约束条件为定理3.1中的矩阵不等式：

由于该约束是线性的，我们可以采用遗传算法或梯度下降法在可行域内搜索使最小的。对于小规模网络，也可直接利用LMI工具箱求解带线性目标的最小化问题：

其中 $\gamma > 0$ 是预设的衰减率(收敛速度)。该问题可以转化为半定规划(SDP)进行求解。

4仿真验证与分析

本章在前述理论分析的基础上，通过数值仿真对所提出的分层牵引控制方法进行验证，并对系统的同步性能进行分析。

4.1 仿真验证

为了验证本文所提出的分数阶有向复杂网络牵引控制方法的有效性，本章基于三维蔡氏电路构建节点动力学模型，并结合分层牵引控制策略进行数值仿真分析。

考虑由个节点构成的有向网络，其拓扑结构由邻接矩阵表示为：

对该网络进行强连通分量(SCC)分解，可得：SCC1={1, 2, 3}，由于存在路径1→2→3→1，构成强连通子图；SCC2 = {4}，为单节点子图。据此可构造对应的有向无环图(DAG)：SCC1 → SCC2。

图 3分解后的无环图

如图3所示，根据DAG结构，将网络划分为：第1层：SCC1 = {1, 2, 3} 第2层：SCC2 = {4} 在牵引节点选择方面：对于SCC1，采用入度优先原则选取关键节点进行牵引控制，其控制增益设置为较大值；对于SCC2，由于其无法从其他层获得信息传播，必须直接施加牵引控制。因此，控制增益向量选取为：

该配置保证了上层节点优先同步，并通过网络耦合作用驱动下层节点实现同步。

节点动力学选取为分数阶蔡氏电路系统，其形式为：

( (4-1) )

其中，为第i个节点的状态向量，为分数阶阶次，a, b为系统参数。非线性函数定义为：

仿真中参数取值为：。系统阶次选取为。领导者节点由同构系统生成，其状态记为。

4.1.3 数值方法说明

采用 Grünwald - Letnikov 方法对分数阶系统进行离散化，其近似形式为：

( (4-2) )

其中权系数满足递推关系：

( (4-3) )

仿真参数设置如下：

步长：，仿真时长：。

## 4.2 实验分析

图 4 无牵引控制下各节点的状态

图 4 给出了在无牵引控制作用下，分数阶蔡氏电路网络各节点第一维状态变量的演化曲线。从图中可以清楚地观察到，在没有外部控制增益干预的情况下，各节点的运动轨迹呈现出杂乱无章的混沌演化状态。尽管网络内部存在耦合作用，但由于缺乏有效的牵引引导，各节点不仅无法实现相互同步，且其轨迹与领导者信号完全脱离。

图 5 分层牵引控制下各节点状态变量的同步过程

图5给出了在分层牵引控制作用下，各节点第一维状态变量的演化曲线。从图中可以看出，各节点从不同初始状态出发，在系统演化初期存在一定差异，但在牵引控制与网络耦合作用下，节点状态迅速向领导者轨迹靠拢。在较短时间内，所有节点状态逐渐重合，并最终与领导者状态完全一致。该结果表明，通过对强连通分量进行分层并合理配置牵引节点，可以实现复杂网络的逐层同步。

图 6 有控制与无控制情况下系统同步误差对比

图6给出了有控制与无控制情况下系统同步误差的变化情况。从结果可以看出，在无控制作用下，系统同步误差始终维持在较高水平并呈现明显波动，难以实现同步。而在引入牵引控制策略后，误差在4s后迅速衰减，表明该控制方法能够显著提高系统的同步性能，从而验证了所提出分层牵引控制策略的有效性[15]。

图 7 不同分数阶阶次下系统同步误差对比

为了分析分数阶阶次对系统同步性能的影响，本文选取阶次0.8，0.9和0.95进行对比仿真。从图7可以看出，随着阶次逐渐增大，系统的收敛速度有所提升。相对来说，当阶次较小时，系统的记忆效应更加明显，这会使得收敛过程变慢，同时在过渡阶段还会出现一定程度的振荡。不过需要说明的是，虽然不同阶次下的瞬态响应存在差异，但同步误差最终都能够收敛到零，说明所提出的分层牵引控制方法在一定程度上具有稳定性和鲁棒性[16]。

本章以一个4节点的有向非强连通网络为例进行分析。首先通过强连通分量分解得到其对应的有向无环图结构，在此基础上设计分层牵引控制策略，使系统能够对动态领导者实现同步跟踪。仿真结果表明，这种基于SCC分解的方法对于牵引节点的选择是有帮助的，同时分层控制策略可以使系统按层次逐步收敛。在参数选择较为合适的情况下，系统最终能够实现渐近同步。另外，从仿真结果也可以看出，分数阶阶次主要影响系统的动态响应过程，但不会改变最终同步的结果。整体来看，该方法在分数阶有向复杂网络同步问题中具有一定的适用性和有效性。为研究分数阶阶次对系统同步性能的影响，选取不同阶次进行对比仿真。仿真结果图7表明，随着分数阶阶次的增大，系统的收敛速度逐渐提高；当阶次较小时，系统表现出更加明显的记忆效应，导致收敛过程相对缓慢且伴随一定程度的振荡。尽管不同阶次下系统的瞬态响应存在差异，但同步误差最终均趋于零，说明所提出的分层牵引控制方法具有良好的稳定性与鲁棒性[16]。

本章以一个4节点有向非强连通网络为研究对象，通过强连通分量分解构建其有向无环图(DAG)结构，并在此基础上设计分层牵引控制策略，实现了对动态领导者的同步跟踪。仿真结果表明，SCC分解能够有效指导牵引节点的选取，分层牵引控制策略可保证系统按层次逐步实现稳定收敛；在合理的参数配置下，系统能够达到渐近同步。此外，分数阶阶次对系统的动态响应特性具有一定影响，但并不改变系统最终实现同步的结论。综合来看，所提出的方法在分数阶有向复杂网络同步问题中具有良好的适用性与有效。

## 5 总结与展望

### 5.1 研究结论

本文围绕复杂网络系统的同步控制问题开展研究，针对具有非线性动态特性的多智能体系统，设计了一种基于牵引控制的同步控制策略。通过图论方法对网络结构进行建模，并结合分数阶系统理论，对系统的同步性进行了分析与研究。

在理论分析方面，本文从复杂网络的拓扑结构出发，对多智能体系统进行了建模，并利用拉普拉斯矩阵来刻画节点之间的耦合关系。在此基础上，引入牵引控制策略，通过对控制输入的适当设计，使系统状态能够逐步向领导者节点靠近并最终实现

同步。进一步地,通过稳定性分析,给出了系统实现同步的一组充分条件,从理论上说明了该方法是可行的。

在算法实现方面,考虑到传统基于中心性指标的方法在节点重要性评估上存在一定局限,本文引入了ControlRank方法,并采用其相对简化的迭代形式进行计算。这样在一定程度上降低了计算复杂度,同时也兼顾了评估结果的合理性,为牵引节点的选取提供了一个可行的依据。

在数值仿真部分,通过构建具体的多智能体网络模型,对比分析了无控制和引入控制两种情形下的系统行为。结果可以看到,在加入牵引控制后,各节点状态逐渐趋于一致,同步误差也随时间减小并接近于零,这与前面的理论分析基本一致,也从侧面验证了所提方法的有效性。

总体来看,本文方法在理论分析和仿真验证两个方面都取得了预期效果,对复杂网络同步控制问题的研究提供了一定参考。

在理论分析方面,基于复杂网络的拓扑结构,构建了多智能体系统的数学模型,并利用拉普拉斯矩阵描述节点之间的耦合关系。在此基础上,引入牵引控制策略,通过合理设计控制输入,实现了系统向领导者节点状态的渐近同步。通过对系统稳定性的分析,给出了保证系统实现同步的充分条件,从理论上证明了所提出方法的可行性。

在算法实现方面,针对传统方法在节点重要性评估中的局限性,本文引入ControlRank方法,并采用其简化迭代形式进行实现,从而在降低计算复杂度的同时,兼顾了评估精度,为控制节点的选取提供了有效依据。

在数值仿真方面,通过构建具体的多智能体网络模型,分别在无控制和有控制两种情形下进行对比实验。仿真结果表明,在引入牵引控制策略后,各节点状态能够逐渐收敛至一致轨迹,系统同步误差趋于零,与理论分析结果一致,从而验证了所提出控制方法的有效性与可行性。

综上,本文所提出的同步控制方法在理论分析与数值仿真两个方面均取得了良好的效果,为复杂网络同步控制问题的研究提供了一定的参考价值。

## 5.2 研究展望

尽管本文在复杂网络同步控制问题上取得了一定的研究成果,但仍存在一些有待进一步研究和完善的方面:

(1)本文主要针对固定拓扑结构的复杂网络进行了研究,而在实际应用中,网络拓扑结构往往具有时变特性。因此,未来可以进一步研究时变拓扑网络下的同步控制问题,以提高方法的适用范围。

(2)本文所研究的系统模型相对理想化,未考虑外部扰动和系统不确定性因素。在后续研究中,可以将随机扰动或参数不确定性引入模型中,以增强控制策略的鲁棒性分析。

(3)在控制方法方面,本文采用的是线性牵引控制策略,未来可以进一步探索非线性控制方法、自适应控制或分布式控制策略,以提升系统性能。

(4)在仿真实验方面,本文仅通过小规模网络进行了验证,后续可以考虑在大规模复杂网络中进行实验,以进一步验证方法的有效性与可扩展性。

未来工作可在上述方向上进一步深入研究,从而不断完善复杂网络同步控制理论及其工程应用价值。

## 参考文献

- [1]Wang X F, Chen G. Pinning control of scale-free dynamical networks[J]. PhysicaA: Statistical Mechanics and its Applications, 2002, 310(3-4): 521-531.
- [2]张文芳. 分数阶微积分概念的起源和演化 [D]. 西北大学, 2014.
- [3]付洋. 分数阶微积分性质及其应用 [D]. 安庆师范大学, 2018.
- [4]Watts D J, Strogatz SH. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440 - 442.
- [5]Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509 - 512.
- [6]任红卫, 邓飞其. 随机复杂网络同步控制研究进展综述[J]. 控制理论与应用, 2017, 34(10): 1261-1274.
- [7]Podlubny I. Fractional differential equations[M]. Academic Press, 1999.
- [8]Zhao L, Zhang Q. Synchronization of fractional-order complex networks with time-varying delays via pinning control[J]. Neurocomputing, 2018, 275: 2762-2770.

- [9]Ji Z, Lin H. Synchronization of fractional-order reaction-diffusion complex networks via pinning control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2019. 51(6): 3949-3958.
- [10]Wang Y, Yang Y, Li C. Stochastic synchronization of fractional-order complex dynamical networks with noise disturbance[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021, 95: 105630.
- [11]Zhao J, Li Q, Wang Y. Pinning controllability of complex networks: A survey[J]. Annual Reviews in Control, 2021, 51: 98-117.
- [12]PAGE L, BRIN S. The PageRank citation ranking: Bringing order to the web[J]. Technical Report, Stanford InfoLab, 1998.
- [13]Boccaletti S, Bianconi G, Criado R, et al. The structure and dynamics of multilayer networks[J]. Physics Reports, 2014, 544(1): 1-122.
- [14]刘金桂. 分数阶复杂网络同步及其控制研究[D]. 南京: 东南大学, 2012.
- [15]Chen S, Huang S, Liu Y. Finite-time synchronization of complex networks via pinning control[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2017, 15(2): 679-687.
- [16]Liu T, Zhang H, Xie W. Pinning control of complex dynamical networks with time delay[J]. Asian Journal of Control, 2010, 12(5): 578-584.

#### 致 谢

时光匆匆，本科阶段的学习即将结束，在论文完成之际，心中充满感激。在本论文的写作过程中，指导教师给予了我耐心细致的指导，从选题确定到思路梳理，再到论文的反复修改，都使我受益良多。本科阶段各位任课教师的讲授为我打下了扎实的专业基础，同学们在学习和生活上的陪伴与帮助也让这段时光更加充实而难忘。同时，家人一直以来的理解与支持，使我能够安心完成学业。在此谨致以诚挚的感谢。

#### 说明:

- 1、支持中、英文内容检测；
- 2、AI特征值=AI特征字符数/总字符数；
- 3、红色代表AI特征显著部分，计入AI特征字符数；
- 4、棕色代表AI特征疑似部分，未计入AI特征字符数；
- 5、检测结果仅供参考，最终判定是否存在学术不端行为时，需结合人工复核、机构审查以及具体学术政策的综合应用进行审慎判断。



关注微信公众号